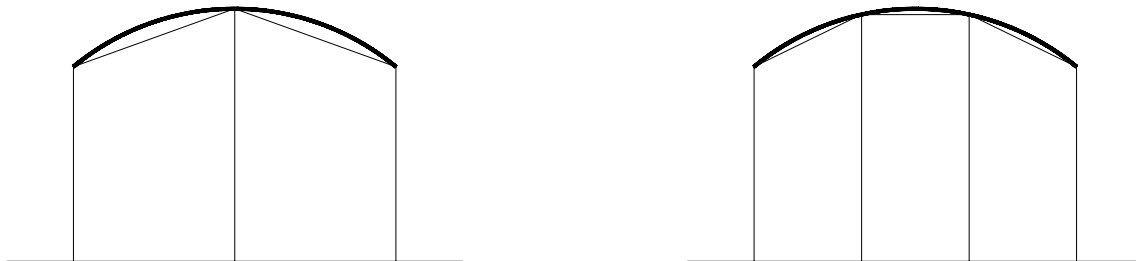
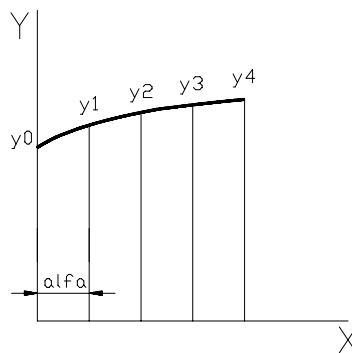


MÉTODOS DE INTEGRACIÓN APROXIMADA

El método más simple e intuitivo de integración aproximada es el **método de los trapecios**, en el que se sustituye la función o la curva por varias cuerdas que unen los extremos de las ordenadas (también se puede decir que se sustituye en cada tramo por un polinomio de primer grado). Es evidente que se conseguirá mayor precisión en la medida en que tengamos un número mayor de ordenadas y por consiguiente de cuerdas, pues la adaptación de las cuerdas a la función mejora, tal y como podemos ver en las figuras siguientes.



El procedimiento de cálculo consiste en hallar el área de los distintos trapecios entre ordenadas consecutivas y sumarlos todos. Aquí partimos de que la separación entre ordenadas consecutivas es siempre la misma, o sea, igual a alfa



El trapecio entre y_0 e y_1 tendrá el área:

$$Área_0 = alfa \times \frac{y_0 + y_1}{2}$$

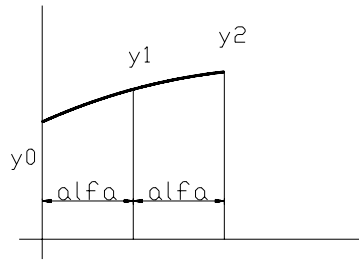
y el siguiente trapecio:

$$Área_1 = alfa \times \frac{y_1 + y_2}{2}$$

y así sucesivamente, con lo que sacando factor común y arreglando los coeficientes nos queda:

$$Área_T = alfa \times \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2} \right)$$

Otro método es el de **Simpson**. Aquí en vez de cuerdas, sustituimos la función por un polinomio de segundo grado (función cuadrática). Al ser una curva suave su adaptación será mejor que en el método anterior. Puesto que aplicamos una función de segundo grado, podemos integrar esta función y buscar un sistema para que partiendo de las ordenadas y del intervalo de separación, podamos calcular el área. Veamos la **primera regla de Simpson**



La función es

$$y = ax^2 + bx + c$$

integramos para determinar el área:

$$\text{Área} = \int_0^{2\alpha} f(x)dx$$

$$\text{Área} = \int_0^{2\alpha} ydx$$

$$\text{Área} = \int_0^{2\alpha} (ax^2 + bx + c)dx$$

$$\text{Área} = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_0^{2\alpha}$$

$$\text{Área} = \frac{a(2\alpha)^3}{3} + \frac{b(2\alpha)^2}{2} + c2\alpha$$

$$\text{Área} = \frac{8a\alpha^3}{3} + \frac{4b\alpha^2}{2} + 2c\alpha$$

sacamos factor común $\alpha/3$

$$\text{Área} = \frac{\alpha}{3} (8a\alpha^2 + 6b\alpha + 6c)$$

pero también podemos poner:

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \text{ que al ser } x_0 = 0$$

$$y_0 = c$$

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \text{ que al ser } x_1 = \alpha$$

$$y_1 = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \text{ que al ser } x_2 = 2\alpha$$

$$y_2 = a(2\alpha)^2 + b2\alpha + c$$

$$y_2 = 4a\alpha^2 + 2b\alpha + c$$

si tomamos $(1y_0 + 4y_1 + 1y_2)$ tenemos:

$$c + 4a\alpha^2 + 4b\alpha + c + 4a\alpha^2 + 2b\alpha + c$$

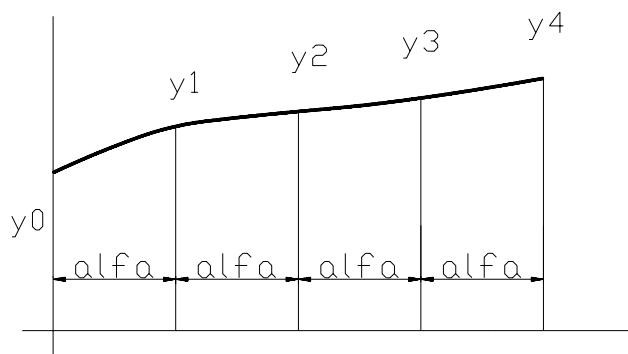
que equivale a:

$$8a\alpha^2 + 6b\alpha + 6c$$

Vemos que se puede sustituir:

$$\text{Área} = \frac{\alpha}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Ahora pongamos ordenadas de un área anexa



Si aplicamos lo anterior a las ordenadas siguientes, al sumar todo tendremos:

$$\text{Área}_{TOTAL} = \frac{\alpha}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{\alpha}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

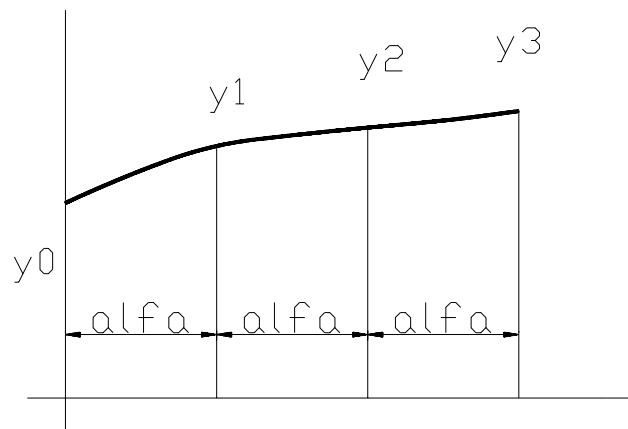
$$\text{Área}_{TOTAL} = \frac{\alpha}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \quad \text{(F-I)}$$

De aquí podemos sacar la secuencia de coeficientes para las distintas ordenadas. La única limitación es, la de que el número de ordenadas debe ser impar (atención al subíndice 0) y por lo tanto el número de intervalos deberá ser par. Los coeficientes serán:

$$\begin{array}{c}
 1\ 4\ 1 \\
 1\ 4\ 2\ 4\ 1 \\
 1\ 4\ 2\ 4\ 2\ 4\ 1 \\
 1\ 4\ 2\ 4\ 2\ 4\ 2\ 4\ 1 \\
 1\ 4\ 2\ 4\ 2\ 4\ 2\ 4\ 2\ 4\ 1
 \end{array}$$

Y así sucesivamente.

En el caso de tener un número de intervalos múltiplo de 3, se podrá aplicar la **segunda regla de Simpson**, en la que se sustituye la curva por una parábola cúbica, tal y como vemos en el siguiente gráfico preparado para el caso inicial de cuatro ordenadas y tres intervalos iguales, necesarios para la función de tercer grado:



Procediendo de una manera similar a la anterior

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$A = \int_0^{3\alpha} y dx$$

$$A = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx \right]_0^{3\alpha}$$

$$A = \frac{a(3\alpha)^4}{4} + \frac{b(3\alpha)^3}{3} + \frac{c(3\alpha)^2}{2} + d3\alpha$$

$$A = \frac{81a\alpha^4}{4} + \frac{27b\alpha^3}{3} + \frac{9c\alpha^2}{2} + 3d\alpha$$

$$A = \frac{3\alpha}{8} (54a\alpha^3 + 24b\alpha^2 + 12c\alpha + 8d)$$

$$y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d \quad \text{al ser } x_0 = 0$$

$$y_0 = d$$

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d$$

$$y_1 = a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$$

$$y_2 = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d$$

$$y_2 = a(2\alpha)^3 + b(2\alpha)^2 + c(2\alpha) + d$$

$$y_2 = 8a\alpha^3 + 4b\alpha^2 + 2c\alpha + d$$

$$y_3 = ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d$$

$$y_3 = a(3\alpha)^3 + b(3\alpha)^2 + c(3\alpha) + d$$

$$y_3 = 27a\alpha^3 + 9b\alpha^2 + 3c\alpha + d$$

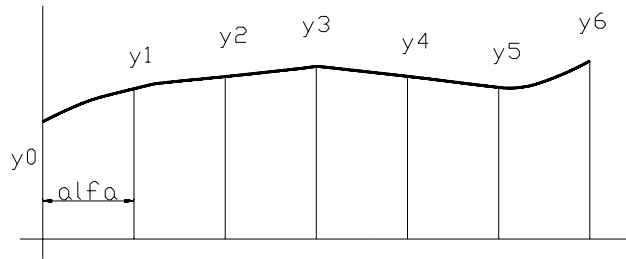
si tomamos $(1y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 1y_3)$ tenemos

$$(54a\alpha^3 + 24b\alpha^2 + 12c\alpha + 8d)$$

Vemos que podemos sustituir

$$A = \frac{3\alpha}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

Ahora pongamos ordenadas de un área anexa



$$Área_{TOTAL} = \frac{3\alpha}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + \frac{3\alpha}{8}(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6)$$

$$Área_{TOTAL} = \frac{3\alpha}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) \quad (F-II)$$

La secuencia de coeficientes será:

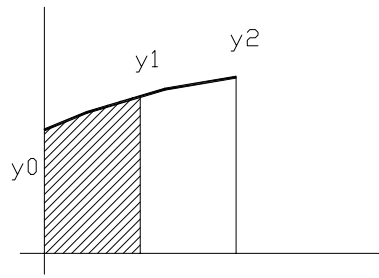
1 3 3 1
 1 3 3 2 3 3 1
 1 3 3 2 3 3 2 3 3 1
 1 3 3 2 3 3 2 3 3 2 3 3 1

Y así sucesivamente.

Al igual que en la primera regla, el coeficiente 2 aparece pues las ordenadas que separan los grupos pertenecen a ambos, pues termina en ellos una secuencia y empieza la siguiente.

Regla de 5, 8 y -1

Esta regla es una variante de la primera regla de simpson, que sirve para calcular solamente una de las dos áreas, o bien la comprendida entre las ordenadas \$y_0\$ e \$y_1\$ ó entre \$y_1\$ e \$y_2\$. En un principio, si solo usamos dos ordenadas no nos quedará mas remedio que aplicar la regla de los trapecios pues por los extremos de estas ordenadas podrán pasar infinitas parábolas, pero al usar la tercera ordenada aunque el área que ella está tocando no se cuente, se podrá definir una única parábola y así obtenerse la precisión del método de simpson que es mayor que el método de los trapecios. El siguiente dibujo muestra el área que se busca (zona sombreada).



$$\text{Área} = \int_0^\alpha f(x) dx$$

$$\text{Área} = \int_0^\alpha y dx$$

$$\text{Área} = \int_0^\alpha (ax^2 + bx + c) dx$$

$$\text{Área} = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_0^\alpha$$

$$\text{Área} = \frac{a(\alpha)^3}{3} + \frac{b(\alpha)^2}{2} + c\alpha$$

$$\text{Área} = \frac{a\alpha^3}{3} + \frac{b\alpha^2}{2} + c\alpha$$

$$\text{Área} = \alpha \left(\frac{a\alpha^2}{3} + \frac{b\alpha}{2} + c \right)$$

pero sabemos por la rela 1ª que:

$$y_0 = c$$

$$y_1 = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

$$y_2 = 4a\alpha^2 + 2b\alpha + c$$

nos queda por saber cuantas veces tenemos que tomar a y_0 a y_1 e y_2 por lo que establecemos las siguientes ecuaciones que igualaremos al resultado que buscamos

$$p \cdot y_0 = \quad \quad \quad p \cdot c$$

$$q \cdot y_1 = q \cdot a \cdot \alpha^2 + q \cdot b \cdot \alpha + q \cdot c$$

$$r \cdot y_2 = r \cdot 4 \cdot a \cdot \alpha^2 + r \cdot 2 \cdot b \cdot \alpha + r \cdot c$$

$$a \cdot \alpha^2 / 3 + b \cdot \alpha / 2 + c$$

que sumando e igualando verticalmente:

$$0 \cdot a \cdot \alpha^2 + q \cdot a \cdot \alpha^2 + r \cdot 4 \cdot a \cdot \alpha^2 = a \cdot \alpha^2 / 3$$

$$0 \cdot b \cdot \alpha + q \cdot b \cdot \alpha + r \cdot 2 \cdot b \cdot \alpha = b \cdot \alpha / 2$$

$$p \cdot c + q \cdot c + r \cdot c = c$$

simplificando

$$0 + q + 4 \cdot r = 1/3$$

$$0 + q + 2 \cdot r = 1/2$$

$$p + q + r = 1$$

las ecuaciones dan este producto:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

que podemos resolver por varios procedimientos o usando Matlab con los siguientes comandos:

```
a=[0 1 4;0 1 2;1 1 1];
b=[1/3; 1/2; 1];
c=a\b
c =
```

```
5/12
2/3
-1/12
```

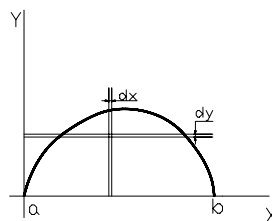
por lo que:

```
p = 5/12
q = 2/3
r = -1/12
```

obteniendo la siguiente igualdad:

$$Área = \alpha \left(\frac{a\alpha^2}{3} + \frac{b\alpha}{2} + c \right) = \alpha \left(\frac{5 \cdot y_0}{12} + \frac{2 \cdot y_1}{3} - \frac{y_2}{12} \right) = \frac{\alpha}{12} (5 \cdot y_0 + 8 \cdot y_1 - 1 \cdot y_2)$$

Hasta ahora solo hemos visto cálculo de superficies utilizando la integración aproximada, pero también podemos aplicar este sistema al cálculo de **momentos, momentos segundos** y así obtener por ejemplo: centroides y radios metacéntricos



Para obtener el momento de la superficie de la figura con respecto a los ejes coordenados, tenemos las siguientes integrales dobles:

Con respecto al eje x:

$$Mto_x = \int_a^b \int_0^y y \, dy \, dx$$

$$Mto_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dx$$

Para hacer la integración aproximada sustituimos en las fórmulas de simpson anteriores, las ordenadas y, por la parte de la integral hasta dx, tal y como vemos en el siguiente ejemplo:

$$Mto_x = \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2} (y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + y_4^2) \quad (\text{F-III})$$

Con respecto al eje y:

$$Mto_y = \int_a^b \int_0^y x \, dy \, dx$$

$$Mto_y = \int_a^b x y \, dx$$

Para hacer la integración aproximada sustituimos en las fórmulas de simpson anteriores, las ordenadas y, por la parte de la integral hasta dx, tal y como vemos en el siguiente ejemplo:

$$Mto_y = \frac{\alpha}{3} (x_0 y_0 + 4x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 4x_3 y_3 + x_4 y_4)$$

x_n = distancia de cada ordenada al eje
 expresamos la distancia en alfas
 $x_n = Fd \cdot \alpha$
 Fd: Factor distancia = x_n / α

$$Mto_y = \frac{\alpha}{3} (Fd_0 \alpha y_0 + Fd_1 \alpha 4y_1 + Fd_2 \alpha 2y_2 + Fd_3 \alpha 4y_3 + Fd_4 \alpha y_4)$$

$$Mto_y = \frac{\alpha^2}{3} (Fd_0 y_0 + Fd_1 4y_1 + Fd_2 2y_2 + Fd_3 4y_3 + Fd_4 y_4) \quad (\text{F-IV})$$

Para obtener los **momentos segundos** de la superficie de la figura (análogos a momentos de inercia) con respecto a los ejes coordenados, tenemos las siguientes integrales dobles:

Con respecto al eje x:

$$I_x = \int_a^b \int_0^y y^2 \, dy \, dx$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 \, dx$$

Para hacer la integración aproximada sustituimos en las fórmulas de simpson anteriores, las ordenadas y, por la parte de la integral hasta dx, tal y como vemos en el siguiente ejemplo:

$$I_x = \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{1}{3} (y_0^3 + 4y_1^3 + 2y_2^3 + 4y_3^3 + y_4^3) \quad (\text{F-V})$$

Con respecto al eje y:

$$I_y = \int_a^b \int_0^y x^2 \, dy \, dx$$

$$I_y = \int_a^b x^2 y \, dx$$

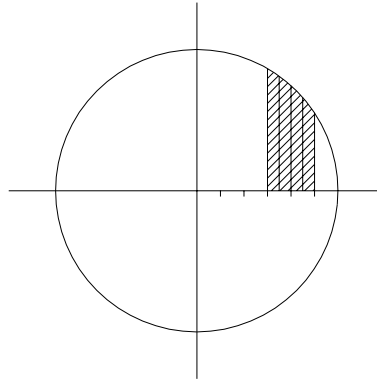
Para hacer la integración aproximada sustituimos en las fórmulas de simpson anteriores, las ordenadas y, por la parte de la integral hasta dx, tal y como vemos en el siguiente ejemplo:

$$I_y = \frac{\alpha}{3} (x_0^2 y_0 + 4x_1^2 y_1 + 2x_2^2 y_2 + 4x_3^2 y_3 + x_4^2 y_4)$$

$$I_y = \frac{\alpha}{3} ((Fd_0 \alpha)^2 y_0 + 4(Fd_1 \alpha)^2 y_1 + 2(Fd_2 \alpha)^2 y_2 + 4(Fd_3 \alpha)^2 y_3 + (Fd_4 \alpha)^2 y_4)$$

$$I_y = \frac{\alpha^3}{3} (Fd_0^2 y_0 + 4Fd_1^2 y_1 + 2Fd_2^2 y_2 + 4Fd_3^2 y_3 + Fd_4^2 y_4) \quad (F-VI)$$

Problema; Determinar la superficie de la zona sombreada, sabiendo que está limitada por el círculo de ecuación: $y^2 = 36 - x^2$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$; $x = 5$



Analíticamente podemos resolver

$$S = \int f(x) dx$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$S = \left[\frac{x}{2} \sqrt{6^2 - x^2} + \frac{6^2}{2} \arcsin \frac{x}{6} \right]_3^5$$

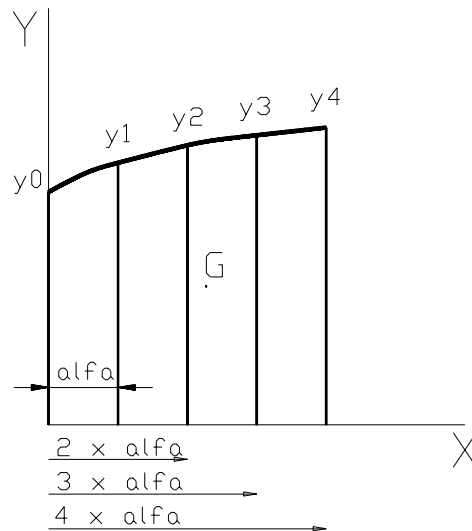
$$S = \left(\frac{5}{2} \sqrt{6^2 - 5^2} + \frac{6^2}{2} \arcsin \frac{5}{6} \right) - \left(\frac{3}{2} \sqrt{6^2 - 3^2} + \frac{6^2}{2} \arcsin \frac{3}{6} \right)$$

$$S = 26.0236 - 17.219 = 8.8046 \text{ u.d.s.}$$

Aplicando el método de los trapecios y de Simpson, tenemos:

Abscisa	Ordenadas	Valores	F. Trapecios	Producto T.	F. Simpson	Producto S.
$x_0 = 3.0$	y_0	5.20	0.50	2.60	1.00	5.20
$x_1 = 3.5$	y_1	4.87	1.00	4.87	4.00	19.49
$x_2 = 4.0$	y_2	4.47	1.00	4.47	2.00	8.94
$x_3 = 4.5$	y_3	3.97	1.00	3.97	4.00	15.87
$x_4 = 5.0$	y_4	3.32	0.50	1.66	1.00	3.32
			$\Sigma =$	17.57	$\Sigma =$	52.83
			$\alpha =$	0.50	$\alpha =$	0.50
			$S = \alpha \cdot \Sigma =$	8.7853	$S = (\alpha / 3) \cdot \Sigma =$	8.8042

Ejemplo 1: Cálculo de las coordenadas del centroide



$$\bar{X}_G = \frac{Mto_y}{S} = \frac{\frac{\alpha}{3}(x_0y_0 + 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_4y_4)}{\frac{\alpha}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)}$$

$$\bar{X}_G = \frac{\frac{\alpha}{3}(0\alpha y_0 + 1\alpha 4y_1 + 2\alpha 2y_2 + 3\alpha 4y_3 + 4\alpha y_4)}{\frac{\alpha}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)}$$

$$\bar{X}_G = \frac{\alpha(0y_0 + 1.4y_1 + 2.2y_2 + 3.4y_3 + 4y_4)}{(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)}$$

$$\bar{Y}_G = \frac{Mto_x}{S} = \frac{\frac{\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2}(1 \cdot y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + 1y_4^2)}{\frac{\alpha}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)}$$

$$\bar{Y}_G = \frac{\frac{1}{2}(y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + y_4^2)}{(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)}$$

Ejemplo 2: Determinar las coordenadas del centroide del triángulo formado por las tres rectas siguientes: $y = x$; $x = 9$; $y = 0$ (eje de abscisas).

Determinaremos el área directamente, dejando al sistema de integración aproximada que calcule los momentos con respecto a los ejes coordenados, sin necesidad de incluir muchas ordenadas, pues las ordenadas están limitadas por rectas.

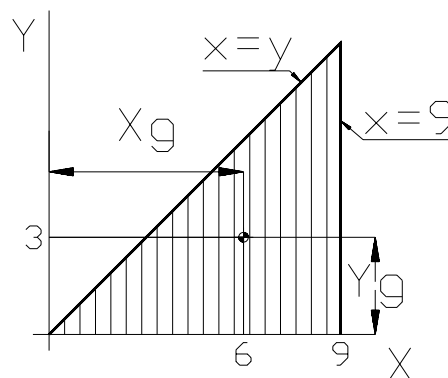
Ordenada	Valor	Potencia (2)	Coef. Simpson	Producto
y_0	0	0	1	0
y_1	4.5	20.25	4	81
y_2	9	81	1	81
$\Sigma =$				162
$\alpha =$				4.5
$M_{to_x} = (\alpha/3) \cdot (1/2) \cdot \Sigma =$				121.5

El valor del área será: $x_2 y_2 / 2 = 9 \times 9 / 2 = 40.5$

La ordenada del centroide será: $Y_g = M_{to_x} / S = 121.5 / 40.5 = 3$ que sabemos es correcto por estar el baricentro de un triángulo a dos tercios de la mediana desde el vértice.

Ordenada	Valor	Factor dist.	Coef. Simp.	Producto
y_0	0	0	1	0
y_1	4.5	1	4	18
y_2	9	2	1	18
$\Sigma =$				36
$\alpha =$				4.5
$M_{to_y} = (\alpha^2/3) \cdot \Sigma =$				243

La abscisa del centroide será: $X_g = M_{to_y} / S = 243 / 40.5 = 6$



Podemos calcularlo por integración, aunque en este caso no ganamos en exactitud, al ser lo anterior totalmente exacto. El resultado sería:

$$Y_g = \frac{M_{to_x}}{S} = \frac{\int_a^b \int_0^y y \, dx \, dy}{\int_a^b \int_0^y dx \, dy}$$

$$Y_g = \frac{\int_a^b \int_0^x y dx dy}{\int_a^b \int_0^x dx dy} = \frac{\int_a^b [y^2 / 2]_0^x dx}{\int_a^b [y]_0^x dx}$$

$$Y_g = \frac{1/2 \int_a^b x^2 dx}{\int_a^b x dx} = \frac{1/2 \int_0^9 x^2 dx}{\int_0^9 x dx}$$

$$Y_g = \frac{1/2 [x^3 / 3]_0^9}{[x^2 / 2]_0^9} = \frac{121.5}{40.5} = 3$$

$$X_g = \frac{Mto_y}{S} = \frac{\int_a^b \int_0^y x dx dy}{\int_a^b \int_0^y dx dy}$$

$$X_g = \frac{\int_a^b \int_0^x x dx dy}{40.5} = \frac{\int_a^b x [y]_0^x dx}{40.5}$$

$$X_g = \frac{\int_0^9 x^2 dx}{40.5} = \frac{[x^3 / 3]_0^9}{40.5} = \frac{729}{40.5} = 18$$

Este ejercicio no puede resolverse por el procedimiento de integración de los trapezios. El motivo es que el momento de una ordenada intermedia no es el momento intermedio entre dos ordenadas. Por ejemplo: El momento de la ordenada x= 1.5 es 1.5² = 2.25 pero el momento de las ordenadas anterior y posterior es: 1² = 1 y 2² = 4 intermedio = 5/2 = 2.50 Al integrar se producirá un error por exceso

Ordenada	Valor	Potencia (2)	Coef. Trapezios	Producto
y ₀	0	0	1/2	0
y ₁	4.5	20.25	1	20.25
y ₂	9	81	1/2	40.5

$$\Sigma = 60.75$$

$$\alpha = 4.5$$

$$Mto_x = \alpha \cdot (1/2) \cdot \Sigma = 136.69$$

El valor del área será: $x_2 \cdot y_2 / 2 = 9 \times 9 / 2 = 40.5$

La ordenada del centroide será: $Y_g = Mto_x / S = 136.69 / 40.5 = 3.38$ que es falso

Ordenada	Valor	Factor dist.	Coef. Trapezios	Producto
y ₀	0	0	1/2	0
y ₁	4.5	1	1	4.5
y ₂	9	2	1/2	9

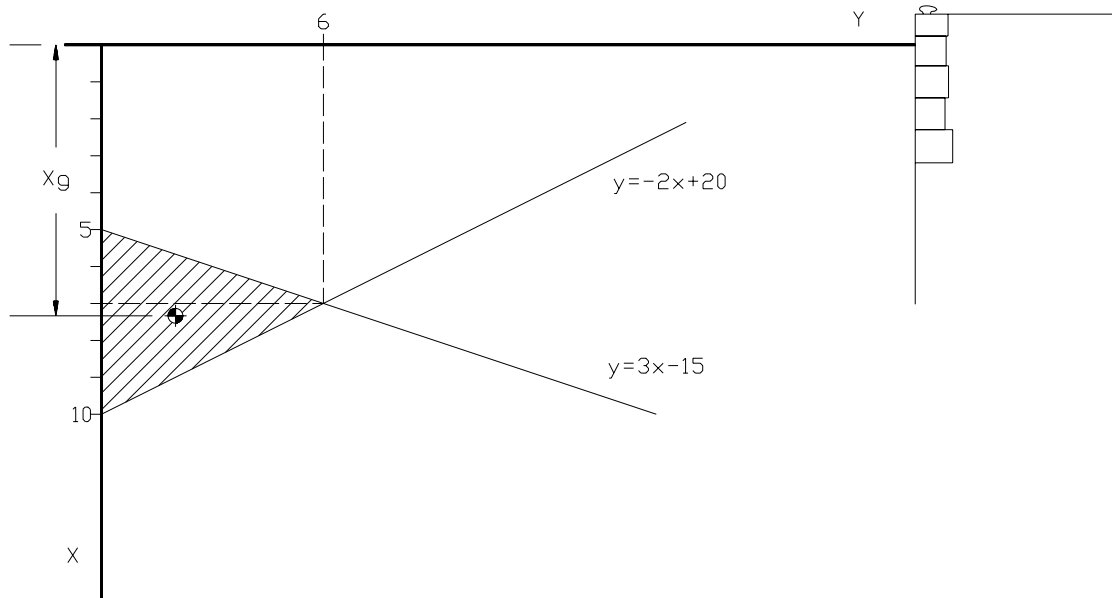
$$\Sigma = 13.5$$

$$\alpha = 4.5$$

$$Mto_y = \alpha^2 \cdot \Sigma = 273.37$$

La abscisa del centroide será: $X_g = Mto_y / S = 273.37 / 40.5 = 6.75$ que es falso

Problema en el que es necesario calcular un momento de inercia: Determinar el centro de presión de una superficie perteneciente a la compuerta de una esclusa. Esta superficie tiene forma de triángulo, tal y como vemos en la siguiente figura. El vértice más próximo al nivel del mar se encuentra a 5 metros de este nivel, otro vértice está 5 metros más abajo en la misma vertical que el anterior y el restante está 6 metros a un lado de los anteriores y a 7 metros del nivel del mar.



Nota: Los ejes están girados 90°

Sabemos que la presión aumenta con la profundidad. En los buques o en los objetos totalmente sumergidos, las componentes horizontales de la presión a cada profundidad quedan anuladas pues estos presentan ambas caras de un plano vertical cualquiera que pase por ellos, al efecto de estas presiones. En este ejercicio no es así; una cara de la superficie está en contacto con el agua y la otra no. Por este motivo un área diferencial que esté más cerca que otra, del nivel del agua, soportará una presión menor, con lo que el centro de presión no coincidirá con el centro geométrico de la superficie sumergida y estará a una profundidad mayor.

En primer lugar calculamos las coordenadas del centro geométrico de la superficie:

$$X_g = \frac{Mto_y}{S} = \frac{\int_a^b \int_0^y x dy dx}{\int_a^b \int_0^y dy dx} = \frac{\int_0^y \int_a^b x dx dy}{\int_0^y \int_a^b dx dy} = \frac{\int_0^6 \int_{5+y/3}^{10-y/2} x dx dy}{\int_0^6 \int_{5+y/3}^{10-y/2} dx dy}$$

$$X_g = \frac{\int_0^6 [x^2/2]_{5+y/3}^{10-y/2} dy}{\int_0^6 [x]_{5+y/3}^{10-y/2} dy} = \frac{1/2 \int_0^6 ((5y^2/36) - (40y/3) + 75) dy}{\int_0^6 ((-5y/6) + 5) dy}$$

$$X_g = \frac{5/72 \int_0^6 y^2 dy - 20/3 \int_0^6 y dy + 75/2 \int_0^6 dy}{-5/6 \int_0^6 y dy + 5 \int_0^6 dy} = \frac{5/72 [y^3/3]_0^6 - 20/3 [y^2/2]_0^6 + 75/2 [y]_0^6}{-5/6 [y^2/2]_0^6 + 5[y]_0^6}$$

$$X_g = \frac{110}{15} = 7.3 \text{ metros}$$

aplicando simpson: (para el momento usamos F-IV)

Ordenada	Fact. Simpson	Producto	F. dist=abscisa/α	Mto.y
0	1	0	10	0
1.5	4	6	11	66
3	2	6	12	72
4.5	4	18	13	234
6	2	12	14	168
5	4	20	15	300
4	2	8	16	128
3	4	12	17	204
2	2	4	18	72
1	4	4	19	76
0	1	0	20	0
		Σ=		Σ=
			90	
		α=	0.5	
		Xg=(α.Σ Mto/ Σ Pro)=	7.333	

Atención a las simplificaciones

$$Y_g = \frac{Mto_x}{S} = \frac{\int_0^6 \int_a^b y dy dx}{15} = \frac{\int_0^6 \int_{5+y/3}^{10-y/2} y dy dx}{15} = \frac{\int_0^6 y [x]_{5+y/3}^{10-y/2} dy}{15}$$

$$Y_g = \frac{\int_0^6 y((-5y/6) + 5) dy}{15} = \frac{-5/6 \int_0^6 y^2 dy + 5 \int_0^6 y dy}{15} = \frac{-5/6 [y^3/3]_0^6 + 5 [y^2/2]_0^6}{15} = 2 \text{ metros}$$

Aplicando Simpson: (para el momento usamos F-III)

Ordenada	Valor	Valor^2	F. Simpson	Producto
Y5	0	0	1	0
Y5 1/2	1.5	2.25	4	9
Y6	3	9	2	18
Y6 1/2	4.5	20.25	4	81
Y7	6	36	2	72
Y7 1/2	5	25	4	100
Y8	4	16	2	32
Y8 1/2	3	9	4	36
Y9	2	4	2	8
Y9 1/2	1	1	4	4
Y10	0	0	1	0
			Σ=	360
			α=	0.5
			Yg=(α/6)*Σ/S=(0.5/6)*360/15=	2
			También: Yg=Σ/(2*Sumat. Area)=360/(2*90)=	2

Sabemos que la fuerza total que ejerce el agua sobre la superficie sumergida es:

$$F = Pe.S.X_g$$

siendo (Pe) el peso específico del agua, (S) la superficie y (Xg) la profundidad a la que está su centro geométrico (téngase en cuenta que el peso específico es prácticamente constante debido a la casi nula compresibilidad del agua).

Esta fuerza es la generada por por todos los elementos diferenciales de superficie a la correspondiente profundidad, por lo que podemos poner también:

$$F = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} Pe \cdot x \, dx \, dy = Pe \int_a^b x y \, dx = Pe \cdot M_{to_y} = Pe \cdot S \cdot X_g$$

Esta fuerza multiplicada por la profundidad (que aun desconocemos) del centro de presión, será un momento que podremos calcular al integrar los momentos que ejercen las superficies diferenciales, de tal modo que:

$$F \cdot X_m = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} Pe \cdot x^2 \, dx \, dy = Pe \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dx \, dy = Pe \cdot I_y$$

siendo I_y el momento segundo con respecto a la superficie del agua

$$Pe \cdot S \cdot X_g \cdot X_m = Pe \cdot I_y$$

$$X_m = \frac{I_y}{S \cdot X_g}$$

usando F-VI

Ordenada	Valor	F.Dist.= x_n/α	Fact dis ^2	Coef. Simp.	Producto
Y5	0	10	100	1	0
Y5 1/2	1.5	11	121	4	726
Y6	3	12	144	2	864
Y6 1/2	4.5	13	169	4	3042
Y7	6	14	196	2	2352
Y7 1/2	5	15	225	4	4500
Y8	4	16	256	2	2048
Y8 1/2	3	17	289	4	3468
Y9	2	18	324	2	1296
Y9 1/2	1	19	361	4	1444
Y10	0	20	400	1	0
$\Sigma=$					19740
$\alpha=$					0.5
$I_y=(\alpha^3/3)*\Sigma=$					822.5

$$X_m = 822.5 / (15 * 7.3) = 7.477 \text{ metros}$$

Comprobamos:

$$X_m = \frac{\int_a^b \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy \, dx}{S \cdot X_g} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \int_{5+y/3}^{10-y/2} x^2 \, dy \, dx}{15 * 7.3} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} [x^3/3]_{5+y/3}^{10-y/2} \, dy}{15 * 7.3} = 7.477 \text{ metros}$$

También se podría haber utilizado la fórmula:

$$X_m = \frac{I_g}{S \cdot X_g} + X_g$$

Para la determinación de Y_m :

$$F \cdot Y_m = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} Pe \cdot x y \, dx \, dy = Pe \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} x y \, dx \, dy = Pe \cdot P_{xy}$$

Siendo P_{xy} el momento segundo mixto o producto de inercia de la superficie con respecto a los ejes coordenados

$$Pe \cdot S \cdot X_g \cdot Y_m = Pe \cdot P_{xy}$$

$$Y_m = \frac{P_{xy}}{S \cdot X_g}$$

Para determinar el momento mixto de inercia usando el método de Simpson ponemos la fórmula:

$$P_{xy} = \int_a^b \int_0^y xy dx dy = \int_a^b x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^y dx = \frac{1}{2} \int_a^b xy^2 dx$$

$$P_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{3} (x_0 y_0^2 + 4x_1 y_1^2 + 2x_2 y_2^2 + 4x_3 y_3^2 + x_4 y_4^2)$$

$$P_{xy} = \frac{\alpha}{6} (Fd_0 \alpha y_0^2 + 4Fd_1 \alpha y_1^2 + 2Fd_2 \alpha y_2^2 + 4Fd_3 \alpha y_3^2 + Fd_4 \alpha y_4^2)$$

$$P_{xy} = \frac{\alpha^2}{6} (Fd_0 y_0^2 + 4Fd_1 y_1^2 + 2Fd_2 y_2^2 + 4Fd_3 y_3^2 + Fd_4 y_4^2)$$

Ordenada	Valor	Valor^2	F.Dist.=x _n /α	Coef. Simp.	Producto
Y5	0	0	10	1	0
Y5 1/2	1.5	2.25	11	4	99
Y6	3	9	12	2	216
Y6 1/2	4.5	20.25	13	4	1053
Y7	6	36	14	2	1008
Y7 1/2	5	25	15	4	1500
Y8	4	16	16	2	512
Y8 1/2	3	9	17	4	612
Y9	2	4	18	2	144
Y9 1/2	1	1	19	4	76
Y10	0	0	20	1	0
Σ=					5220
α=					0.5
Pxy=(α ² /6)*Σ=					217.5

$$Y_m = \frac{P_{xy}}{S \cdot X_g} = \frac{217.5}{15 \cdot 7.3} = 1.977 \text{ metros}$$

comprobamos:

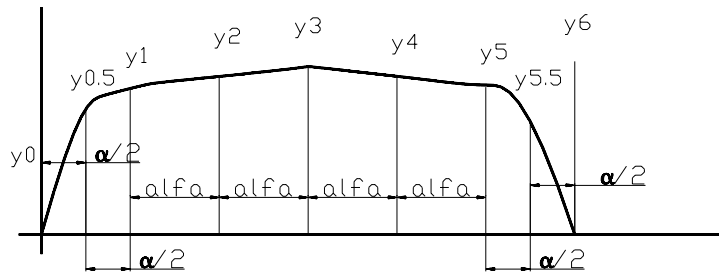
$$P_{xy} = \int_{y_1}^{y_2} \int_a^b xy dx dy = \int_{y_1}^{y_2} \int_{5+y/3}^{10-y/2} xy dx dy = \int_{y_1}^{y_2} y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{5+y/3}^{10-y/2} dy$$

$$P_{xy} = 217.5 \text{ m}^4$$

$$Y_m = 1.977 \text{ metros}$$

Subdivisión de intervalos:

En los buques es común que las curvas que delimitan las líneas de agua, tengan una parte central en que las semimangas no tienen gran variación entre secciones consecutivas, por pertenecer o estar próximas al cuerpo cilíndrico del buque y sin embargo entre las primeras y entre las últimas secciones la variación es grande. Algo similar ocurre con las cuadernas, en su parte próxima (ortogonalmente) a la línea base.



Para determinar el área, descomponemos en tres partes, la primera entre y_0 e y_1 , la segunda entre y_1 e y_5 , la tercera entre y_5 e y_6 .

$$S_1 = \frac{\alpha/2}{3} (y_0 + 4y_{1/2} + y_1)$$

$$S_2 = \frac{\alpha}{3} (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + y_5)$$

$$S_3 = \frac{\alpha/2}{3} (y_5 + 4y_{5/2} + y_6)$$

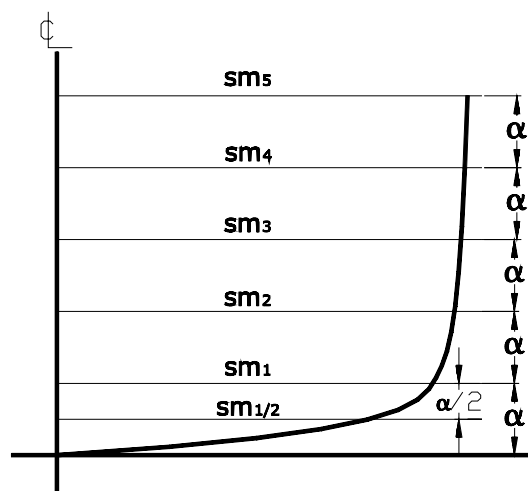
Arreglamos S_1 y S_3 para poder sacar factor común:

$$S_1 = \frac{\alpha}{3} \left(\frac{1}{2}y_0 + 2y_{1/2} + \frac{1}{2}y_1 \right)$$

$$S_3 = \frac{\alpha}{3} \left(\frac{1}{2}y_5 + 2y_{5/2} + \frac{1}{2}y_6 \right)$$

El área total será:

$$S_T = \frac{\alpha}{3} \left(\frac{1}{2}y_0 + 2y_{1/2} + \frac{3}{2}y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + \frac{3}{2}y_5 + 2y_{5/2} + \frac{1}{2}y_6 \right)$$



En la sección transversal tenemos dos partes: la primera está delimitada por las semimangas sm_0 y sm_1 y la otra parte está delimitada por las semimangas sm_1 y sm_5

$$S_1 = \frac{\alpha}{3} (sm_0 + 4sm_{1/2} + sm_1)$$

$$S_2 = \frac{\alpha}{3} (sm_1 + 4sm_2 + 2sm_3 + 4sm_4 + sm_5)$$

arreglando coeficientes:

$$S_1 = \frac{\alpha}{3} \left(\frac{1}{2} sm_0 + 2sm_{1/2} + \frac{1}{2} sm_1 \right)$$

$$S_T = \frac{\alpha}{3} \left(\frac{1}{2} sm_0 + 2sm_{1/2} + \frac{3}{2} sm_1 + 4sm_2 + 2sm_3 + 4sm_4 + sm_5 \right)$$

También es posible combinar varios métodos de integración, por ejemplo usando la 1ª y la 2ª regla de Simpson. En este caso es conveniente sacar factor común solamente a alfa, dejando dentro del paréntesis a 1/3, sumar todas las ordenadas y comprobar en todo caso si es posible sacar factor común.